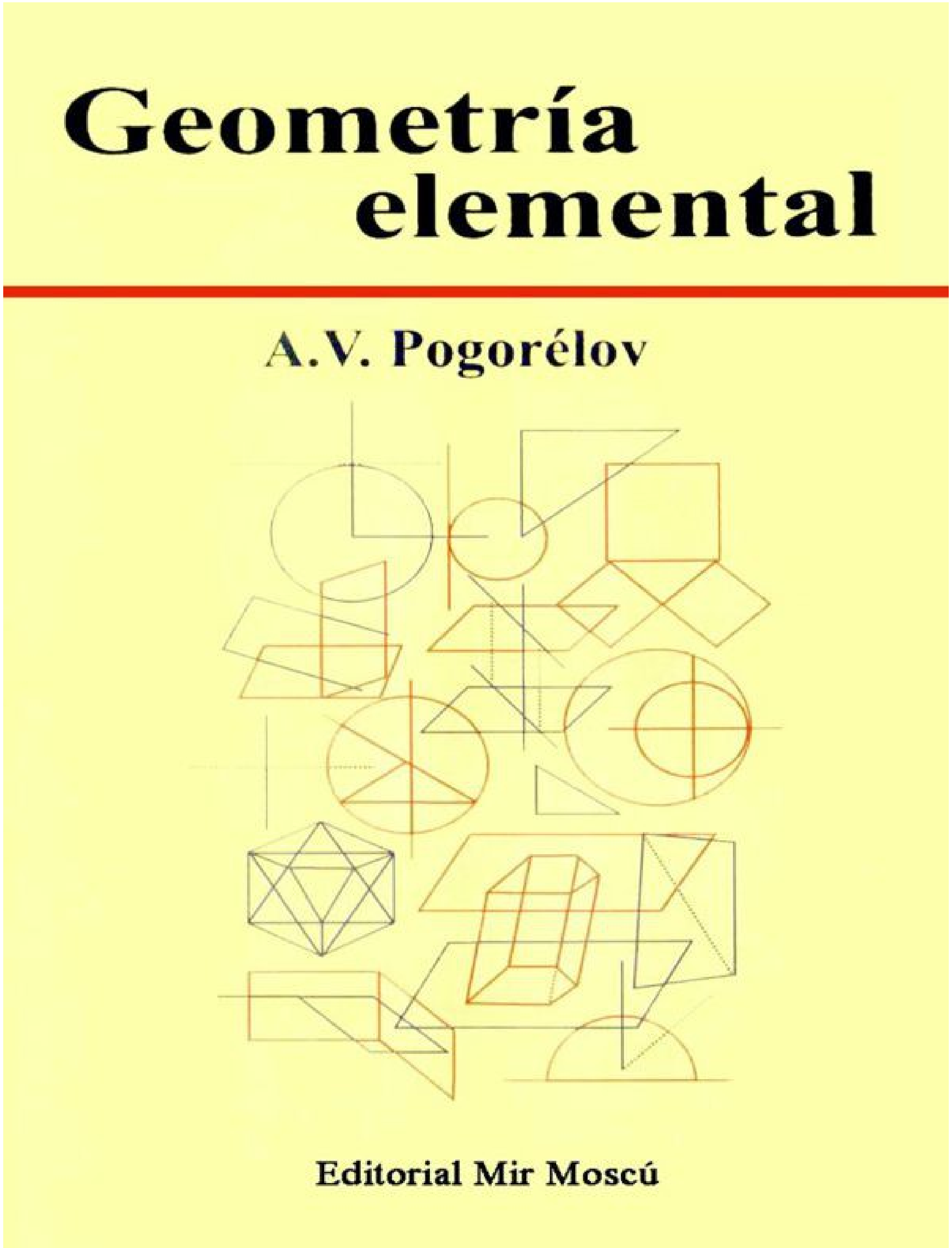

Prefacio

En las etapas iniciales, la enseñanza de la Geometría tiene por objeto, además de comunicar a los alumnos los resultados geométricos, darles a conocer el método con ayuda del cual se obtienen esos resultados. Sabido es que los resultados geométricos (teoremas) son obtenidos por medio de razonamientos lógicos (demostraciones) arrancando de algunos planteamientos de partida (axiomas). Los razonamientos lógicos son parte indispensable de todo saber. La Geometría se distingue por la claridad y la sencillez tanto en el enunciamiento del resultado como en los planteamientos de arranque a partir de los cuales debe obtenerse ese resultado. De ahí que la Geometría nos brindo las mejores oportunidades para desarrollar el pensamiento lógico en la escuela.
Al ofrecer el curso presente partimos de que la tarea esencial de la enseñanza de la Geometría en la escuela consiste en enseñar al alumno a razonar lógicamente, argumentar sus afirmaciones y demostrarlas. Muy pocos de los egresados de la escuela serán matemáticos y mucho menos geómetras. También habrá los que no utilicen ni una vez en su actividad práctica el teorema de Pitágoras. Sin embargo, difícilmente hallárase uno sólo que no deba razonar, analizar o demostrar.
La experiencia secular de la enseñanza de la Geometría elemental desde los tiempos de Euclides prueba la eficiencia del sistema tradicional. Su perfeccionamiento, relacionado con el desarrollo general de la ciencia, no debe afectar, creemos nosotros, sus bases racionales y profundamente meditadas. Por eso, el curso que ofrecemos, tradicional en esencia, se distingue sólo por una exposición más rigurosa de la materia y cierta revaloración del significado de sus partes componentes.
Este curso de Geometría se basa en un sistema muy poco numeroso de hechos geométricos bien conocidos del alumno y asimilados en los grados primarios. Esto sistema de planteamientos de arranque, llamados más adelanto axiomas, ha sido seleccionado del previo análisis minucioso del curso escolar de Geometría tomando en consideración los ^elementos de demostraciones tradicionales.
La exposición comienza con la repetición, típica en la enseñanza escolar, de lo estudiado anteriormente. Por Jo menos, así será considerado por el alumno. Empero, nuestra meta auténtica es distinta y más profunda: introducir los conceptos y planteamientos de arranque fundamentales, es decir, los axiomas. Los axiomas están enunciados en forma de las propiedades fundamentales de las figuras geométricas elementales compuestas de puntos y rectas. Estos axiomas son sencillos y naturales. Hay casos en que los axiomas son enunciados más ampliamente que exigiría la cuestión para evitar preguntas y confusiones. Por ejemplo, decimos que existen puntos que se hallan en una recta dada y puntos que no se hallan en dicha recta. En realidad, nos bastaría la exigencia de dos puntos en la recta y un punto fuera de la recta.
Una peculiaridad distintiva de nuestra axiomática son los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos. Estos axiomas nos brindan ventajas metódicas substanciales. En primer lugar, eludimos el escollo de introducir la medida para los segmentos y los ángulos. Sabido es que la solución de este problema, dada la construcción axiomática de la geometría, no es nada sencilla y requiero el empleo de medios inasequibles para el alumno por su profundidad. Segundo, a través de los axiomas de la medición incorporamos la Aritmética cursada ya para entonces con lo cual se ensancha notablemente el arsenal de medios utilizados en la demostración geométrica.
Naturalmente, los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos requieren la definición correspondiente de los conceptos de la igualdad de los segmentos y los ángulos. Llamamos iguales a los segmentos de longitud idéntica. Por extraño que parezca, la

mayoría de las personas consideran los segmentos iguales precisamente en este caso, aunque la igualdad de los segmentos se define en la escuela a través de la superposición. Por ello, nuestra definición de la igualdad de los segmentos también es natural desde este punto de vista. En nuestra exposición, la superposición y el movimiento en general son conceptos derivados y sólo los introducimos a mediados del curso.

El segundo parágrafo se inicia con una definición tan precisa de los conceptos axioma, teorema y demostración que nos permite dar siempre una respuesta neta al «por qué» en cada punto de las demostraciones. Por otra parte, tenemos el derecho moral de plantear ese «por qué» al alumno y de exigirle una respuesta. El concepto de la demostración es ilustrado con ejemplos sencillos de análisis circunstanciado.

Conservamos el orden tradicional de distribución del material. Por eso consagramos el § 3 a los ángulos. En este parágrafo las demostraciones de los teoremas son sencillas y naturales. Se basan en los axiomas de la medición y de la construcción de los ángulos.

El parágrafo siguiente se dedica a la igualdad de los triángulos. Su contenido es corriente y las demostraciones sencillas e irreprochables. En términos generales, las demostraciones empleadas no contienen, en cuanto a la idea, nada nuevo. Son bien conocidas. Sin embargo, gracias a la formulación precisa de los planteamientos de arranque, logramos con unas cuantas pinceladas hacer estas demostraciones absolutamente irreprochables. Estas «pinceladas» se refieren en la mayoría de los casos a las propiedades de la posición recíproca de los puntos en la recta y de los rayos en el haz. Dentro de las matemáticas en general, y de las matemáticas modernas en particular, la relación de orden desempeña tanto papel como la relación de equivalencia. Por eso, también desde este punto de vista es conveniente desarrollar este concepto en las figuras geométricas sencillas.

En el § 5 y el § 6 son tratadas las cuestiones tradicionales: propiedad del ángulo exterior del triángulo, relación entre los lados del triángulo y los ángulos opuestos, desigualdad triangular, la perpendicular y la oblicua. Termina cada parágrafo con numerosas preguntas de repaso y ejercicios. Las preguntas de repaso comprenden la definición de los conceptos y la demostración de los teoremas así como de los corolarios que de ellos se desprenden. También abarcan cuestiones no tan esenciales del curso. Las preguntas de repaso determinan exactamente el volumen de los conocimientos necesarios para el alumno y son medio de autocontrol.

El parágrafo siguiente está dedicado a las construcciones geométricas. Analiza los principales problemas de construcción utilizando el compás y la regla y explica el método de los lugares geométricos. Debe decirse que en el actual curso escolar de Geometría no se presta al tema de las construcciones geométricas tanta importancia como en el pasado. Se comprende: las construcciones geométricas ofrecen interés, principalmente, para el desarrollo de las búsquedas de solución y el entrenamiento en las demostraciones. Pero las construcciones geométricas no son el único medio de lograr este propósito.

Los siete primeros parágrafos de este libro podrían ser abarcados bajo el título de Geometría absoluta. En ellos no se utiliza el axioma de las paralelas. Quede sentado que el empleo del axioma de las paralelas no ofrece ventajas palpables en la exposición de esta parte. Si se toma en consideración que la Planimetría está calculada para tres años de enseñanza, esta parte del curso se puede recomendar para el primer año. En el segundo año de enseñanza incluimos la teoría de las paralelas y los temas colaterales inmediatos (§§ 8-12).

El parágrafo octavo del libro está dedicado a la teoría de las paralelas. Comienza con la demostración de los criterios de paralelismo. Alterando la tradición, nos limitamos a dos pares de ángulos de dos paralelas con una secante: los correspondientes internos y los alternos internos. En efecto, estos dos pares de ángulos bastan plenamente para exponer la teoría de las paralelas y de sus aplicaciones. Otros pares de ángulos, como son los correspondientes externos, los alternos externos y demás, no se utilizan prácticamente. En cambio, los ángulos correspondientes internos y alternos son determinados por nosotros rigurosamente, y no sólo por medio de figuras como se hace n menudo, y su empico en las demostraciones se argumenta a fondo. El § 9 contiene el material tradicional sobre los cuadriláteros.

En el § 10 introducimos el concepto del movimiento que, en nuestra exposición, es concepto derivado. Se define como una aplicación que conserva la distancia. Son demostradas las propiedades principales del movimiento y estudiados los casos particulares de los movimientos: simetría respecto a una recta, simetría respecto a un punto, traslación paralela y rotación. Conviene, señalar que el concepto del movimiento geométrico se asocia naturalmente con un proceso. La manera de exponer La Geometría en la escuela, empleando el concepto del movimiento desde el comienzo, da lugar a embrollos y confusiones. Según nuestro método, las propiedades del movimiento netamente formuladas son primero demostradas y luego se aplican.

En el parágrafo siguiente se estudia la circunferencia. El tema central de este parágrafo es el problema de los ángulos en la circunferencia. Se define con precisión los conceptos del arco de circunferencia, del ángulo central que le corresponde y de la medida del ángulo central. Se introduce el concepto del ángulo inscrito y se demuestran los teoremas correspondientes de los ángulos inscritos.

El § 12 contiene el tema final del segundo año de enseñanza. En él se expone, ante todo, la cuestión de la semejanza de los triángulos que, como se sabe, no se lleva nunca hasta el fin en la exposición escolar. En efecto, su solución completa exige el empleo del axioma de la continuidad. Por eso la demostración de la semejanza de los triángulos en el caso principal suele detenerse a mitad del camino. En nuestra exposición el axioma de la continuidad actúa a través del axioma de la medición. Concluimos la demostración del criterio principal de la semejanza con una sencilla observación que se desprende del axioma de La medición. En el curso escolar de la Geometría suele quedar abierta la cuestión de la intersección de la recta con la circunferencia y de la intersección de dos circunferencias. Siempre por la misma causa: la cuestión tropieza con el axioma de la continuidad. Nosotros damos una solución sencilla y exhaustiva de este problema. Y esto se logra, a fin de cuentas, también gracias a los axiomas de la medición.

La tercera parte del curso arranca con el teorema de Pitágoras y sus corolarios: relaciones métricas en un triángulo oblicuángulo, relación entre las diagonales y los lados de un paralelogramo, etc. Además de estas cuestiones tradicionales, se da una demostración sencilla del importante teorema de la existencia del triángulo de lados dados previo cumplimiento de ciertas condiciones necesarias. Este teorema da solución exhaustiva al problema de la posición recíproca de dos circunferencias en dependencia de sus radios y de la distancia entre los centros.

En el § 14 se introducen las funciones trigonométricas de los ángulos. Nos limitamos a tres funciones: seno, coseno y tangente. Sabido es que las tres funciones restantes- secante, cosecante y cotangente—no se utilizan prácticamente. El material de este parágrafo es corriente: fórmulas de reducción, relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo rectángulo, teorema del coseno y teorema de los senos. El parágrafo que le sigue está consagrado a los polígonos convexos con problemas tradicionales acerca de la suma de los ángulos internos y extornos, de la relación entre la longitud de una quebrada convexa y de una quebrada abarcante y, en fin, a los polígonos regulares.

En el curso escolar ofrece ciertas dificultades la exposición del problema del área de las figuras. Nosotros solucionamos este problema de la siguiente manera. Al principio, el concepto del área se introduce, argumentando a fondo sus propiedades, al estudiar un problema práctico concreto. Luego se explica que estas propiedades determinan el área unívocamente. En fin, se demuestra que es correcta la definición del área con esas propiedades. Esta última cuestión puede considerarse facultativa en la enseñanza escolar.

Finalmente, el último tema de la Planimetría: longitud de la circunferencia y área del círculo. En cualquier variante esta cuestión ofrece grandes dificultades. Una es el problema de la existencia, aunque en los grados superiores se vence fácilmente. Hemos unificado las definiciones de los conceptos principales relacionados con la medición de los arcos y las áreas para la circunferencia y el círculo, lo que debo simplificar la exposición. A parte de las cuestiones de la existencia, que han quedado abiertas, otras cuestiones están resueltas con plenitud y precisión suficientes.

La segunda parto del libro, la Estereometría, arranca con el enunciado de los tres axiomas del espacio y la deducción de sus corolarios directos (§ 18). Los axiomas aceptados por nosotros suponen cierta modificación de los axiomas de enunciado tradicional y concuerdan bien con los axiomas del plano. El parágrafo siguiente trata de las cuestiones del paralelismo de las rectas y los planos en el espacio con teoremas y demostraciones tradicionales.

El extenso § 20 está dedicado a diferentes cuestiones de la perpendicularidad de las rectas y los planos. Los parágrafos 18, 19 y 20 constituyen la base de la segunda* parto del curso.

Hay un parágrafo especial (el 21) para las cuestiones relacionadas con el concepto de ángulo entre rectas y planos. Estos conceptos son definidos con claridad. Quedan demostrados los correspondientes teoremas acerca de los ángulos.

El parágrafo 22 acerca de los ángulos diedros, triedros y poliedros contiene, además de las cuestiones tradicionales del curso escolar, la demostración del teorema de los cosenos y del teorema de los senos para el ángulo triedro. Suponemos que estos teoremas, importantes y muy usuales, deben darse en el curso escolar. Sabido es que la solución de los problemas de la posición recíproca de las rectas y los planos en el espacio, y en particular la solución de los problemas de prismas y pirámides, se reduce en su porto esencial a la demostración de estos teoremas generales en distintos casos particulares.

El parágrafo siguiente está dedicado a las transformaciones en el espacio (movimiento, simetría, semejanza y demás). En este parágrafo, la exposición repite deliberadamente, y en ciertos casos textualmente, el parágrafo acerca de las transformaciones en el plano. Para el alumno adelantado, este parágrafo será un agradable repaso de hechos de Planimetría que ya conoce.

El tema de los poliedros (§ 24) comienza con la definición del concepto del cuerpo geométrico. Este concepto se introduce de manera rigurosa y, al mismo tiempo, muy asequible. La rigurosa introducción del concepto del cuerpo geométrico permito llevar más adelante ese rigor a la exposición del problema del volumen y del área del cuerpo geométrico. Los teoremas de prismas y pirámides dados en este parágrafo son tradicionales.

El tema de los poliedros regulares se expone de manera más circunstanciada que suele hacerse en el curso escolar.

El cuarto año de estudio de la Geometría termina aquí con el §25 sobro los rudimentos de la delineación proyectiva. Este parágrafo contiene todas las tarcas principales de la posición

recíproca de los puntos, las rectas y los planos al representarlos en el diseño.
En el § 26, partiendo de la tarea práctica de comparar la capacidad de dos recipientes, se introduce el concepto del volumen del cuerpo y se dilucidan sus propiedades esenciales. Por el método corriente, basándose en esas propiedades, se encuentran los volúmenes de los cuerpos elementales: prismas y pirámides. En fin, se demuestra la justeza de la definición formal del volumen de un poliedro como suma de los volúmenes de las pirámides que lo constituyen. Este último punto puede recomendarse para estudio facultativo. La cuestión del volumen de los cuerpos está expuesta de manera deliberadamente próxima a la cuestión del área de las figuras planas y, para el alumno adelantado, también será un repaso agradable.
Las cuestiones tradicionales relativas a los cuerpos de revolución —cilindro, cono y esfera — están expuestas en el § 27. La medición de los volúmenes y las áreas de estos cuerpos no está incluida aquí, sino que se le consagra parágrafos especiales.
El § 28 ofrece la definición del volumen para cualquier cuerpo. Partiendo de los volúmenes de los cuerpos simples (divisibles en un número finito de pirámides triangulares), el volumen de cualquier cuerpo se define, en esencia, como la cota inferior máxima de los volúmenes de los cuerpos simples que lo contienen. Arrancando de esta definición general se encuentran los volúmenes de todos los cuerpos de revolución considerados en el curso escolar: cilindro, cono, esfera y sus partes. Se demuestra la actividad del volumen para los cuerpos limitados por superficies simples (plana, cilíndrica, cónica y esférica).
El § 29 trata del área de una superficie. Partiendo de la tarea práctica de la cantidad de pintura necesaria para recubrir dos superficies, llegamos a la definición geométrica natural del concepto del área (según Minkowski). Arrancando de esta definición se encuentra, por un método estándar, el área de las superficies de los cuerpos de revolución considerados en el curso escolar: cilindro, cono, esfera y sus partes.

Aleksei Vasilevich Pogorelov