COLEGIO METROPOLITANO DEL SUR

Resolución No. 0427 del 11 de Mayo de 2010

GUIA 04

1. IDENTIFICACIÓN

Área: Matemáticas	**Asignatura:** Calculo	**Fecha:**	**Grado:** Undécimo
Nombre del Estudiante:			**Tiempo:** 2 Semanas
Nombre del Docente: Luis Lozada Ruiz		**Tema:** Funciones Exponenciales y logarítmicas	
Competencia: Ejecuta, verifica e interpreta resultados parciales y totales de procedimientos propios del estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas.			

RECURSOS – RESOURCES: Guía de aprendizaje, Regla, cuaderno de apuntes.

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE – LEARNING STRATEGIES: Resolución de problemas, clase expositiva, utilización de representaciones sagitales, tabulares, gráficas y simbólicas.

OBJETIVO – OBJECTIVE: Terminada la presente guía de aprendizaje el estudiante estará en capacidad de:

- Distinguir funciones exponenciales y logarítmicas través de su representación simbólica, tabular y gráfica.
- Analizar los comportamientos en las variables involucradas en las funciones exponencial y logarítmica.
- Identificar las características y propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas.

1. INDUCCIÓN (INDUCTION)

En el trabajo que se realizará a lo largo de ésta guía, observarás algunas situaciones de la realidad que pueden ser modeladas a través de la función exponencial y la función logarítmica.

1.1 AMBIENTACIÓN - WARMING UP

1.1.1. Observa las explicaciones de la Función Exponencial y Logarítmica en el deporte, en la naturaleza, en el Entorno diario.

1.1 INFORMACIÓN – INFORMATION

El docente explicará las características de la Función Exponencial y Logarítmica, apoyado en las anteriores situaciones:

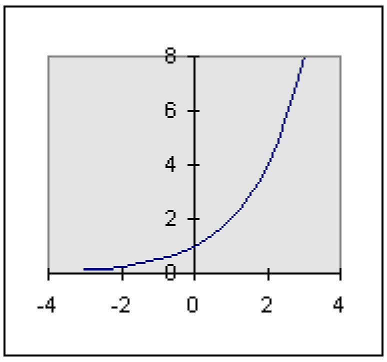
FUNCIONES EXPONENCIALES

Comenzaremos observando las siguientes funciones: $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$. Las funciones f y g no son iguales. La función $f(x) = x^2$ es una función que tiene una variable elevada a un exponente constante. Es una función cuadrática que fue estudiada anteriormente. La función $g(x) = 2^x$ es una función con una base constante elevada a una variable. Esta es un nuevo tipo de función llamada **función exponencial**.

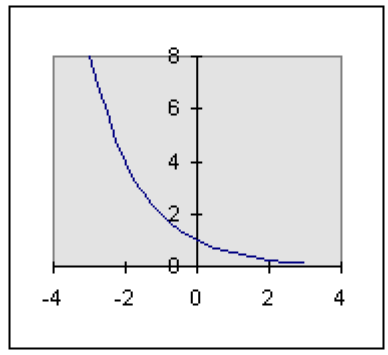
Definición: Una **función exponencial** con base <u>b</u> es una función de la **forma** $\mathbf{f(x) = b^x}$, donde <u>b</u> y <u>x</u> son números reales tal que $b > 0$ y <u>b</u> es diferente de uno.

El **dominio** es el conjunto de todos los números reales y el **recorrido** es el conjunto de todos los números reales positivos.

1) $f(x) = 2^x$



2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x}$



Propiedades de $\mathbf{f(x) = b^x}$, b>0, b diferente de uno:

1) Todas las gráficas intersecan en el punto (0,1).
2) Todas las gráficas son continuas, sin huecos o saltos.
3) El eje de x es la asíntota horizontal.
4) Si $b > 1$ (<u>b</u>, base), entonces b^x aumenta conforme aumenta x.
5) Si $0 < b < 1$, entonces b^x disminuye conforme aumenta x.
6) La función f es una función uno a uno.

Propiedades de las funciones exponenciales: Para **a** y **b** positivos, donde **a** y **b** son diferentes de uno y **x**, **y** reales:

1) Leyes de los exponentes:

$$a)\ (a^x)(a^y) = a^{x+y}$$

$$b)\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$c)\ (a^x)^y = a^{xy}$$

$$d)\ (ab)^x = a^x b^x$$

$$e)\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

2) $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$

3) Para x diferente de cero, entonces $a^x = b^x$ si y sólo si $a = b$.

Ejemplo para discusión: Usa las propiedades para hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones:

1) $2^x = 8$
2) $10^x = 100$
3) $4^{x-3} = 8$
4) $5^{2-x} = 125$

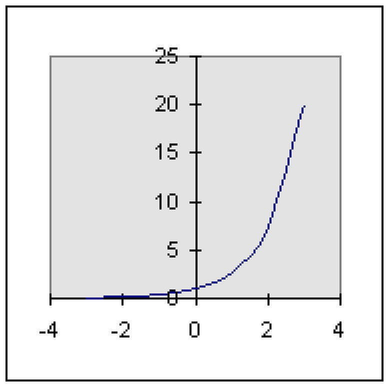
Ejercicio de práctica: Halla el valor de x:

1) $2^x = 64$
2) $27^{x+1} = 9$

La función exponencial de base e
Al igual que p, **e** es un número irracional donde **e = 2.71828...** La notación **e** para este número fue dada por Leonard Euler, 1727.

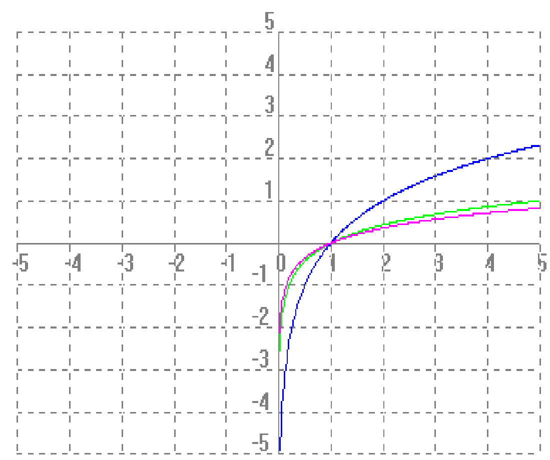
Definición: Para un número real x, la ecuación **$f(x) = e^x$** define a la **función exponencial de base e**.
Las calculadoras científicas y gráficadoras contienen una tecla para la función $f(x) = e^x$.

La gráfica de $f(x) = e^x$ es:



El **dominio** es el conjunto de los números reales y el **rango** es el conjunto de los números reales positivos.

Funciones Logarítmicas

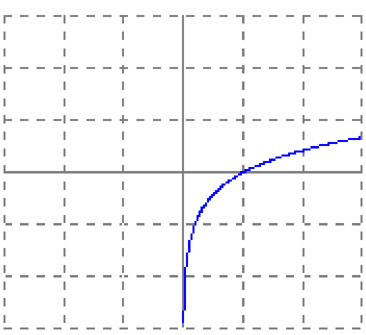


Una **función** se llama **logarítmica** cuando es de la forma **y =log a x** donde la base a es un número y positivo pero distinto de 1, puesto que el resultado sería 0.
Entonces se dan dos casos:

Base mayor que la unidad (a > 1)

Comparación: Las 3 funciones (log 2 x, log 5 x, log 7 x) se unen en el punto (1,0) porque el log a 1 = 0, y el log a a = 1, con lo que coincide que la gráfica pasa por (1,0) y (a,1).
En la función logarítmica (cuando a > 1) cuanto mayor es la base del logaritmo, más cerca del eje X está.

Las funciones de la forma **y = log a x** cuando la base es mayor que la unidad (a > 1) tienen las siguientes características:



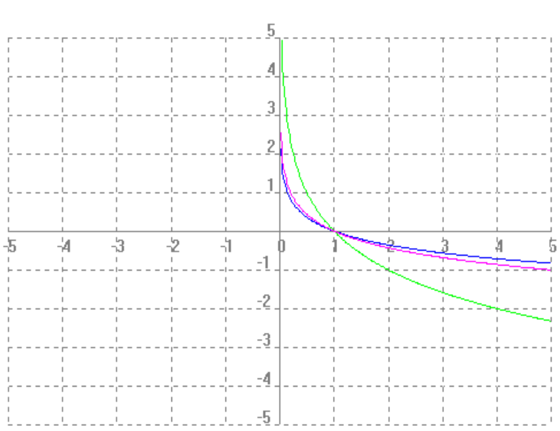
Tomando como ejemplo la función f (x) = log 5 x

-Dominio: el dominio de la función son **los reales positivos** puesto que no existe el logaritmo de un número negativo. Dom (f) = R +
En este tramo la función es negativa porque al introducir la antiimagen de un número racional la imagen que da, es un número negativo, lo que no quiere decir que existan imágenes para números negativos en esta función, ya que es imposible. log -x "

-Recorrido: el recorrido de la función es **toda la recta real** ya que se ve como la función llega de -" y continua hacia + ".

-Continuas y crecientes: la función es **creciente** en todo su dominio porque.....x < x' ! f(x) " f(x'), y **continua** porque todos sus puntos tienen imagen, tienen límite, y el límite de un punto coincide con la imagen del punto.

-Simetría: la función no es **ni** simétrica **impar** (por no ser simétrica respecto del origen) **ni** tampoco **par** (por no ser simétrica respecto del eje de coordenadas no es simétrica respecto del origen, no es simétrica respecto del eje de ordenadas



-Asíntotas: Partiendo del Dominio de la función (Dom(f) = R+), no se ven números concretos candidatos a asíntota por lo que viendo la gráfica deducimos que

x = 0, es una **asíntota vertical** y al probarlo comprobamos que es cierto.

Base positiva y menor que la unidad (0 < a < 1)

Comparación: Las tres funciones (log 1/7 x, log 1/5 x, log ½) pasan por el punto (1,0) al igual que en el otro tipo de función logarítmica ya que el log a 1 = 0, y también pasa por el punto (a,1) porque el log a a = 1.

En la función logarítmica (cuando $0 < a < 1$) cuanto mayor es el denominador de la base de logaritmo más se cerca del eje X está.

Las funciones de la forma **y = log a x** cuando la base es menor que la unidad ($0 < a < 1$) tienen las siguientes características:

(tomando como ejemplo la función $f(x) = \log 1/5\ x$)

-Dominio: el dominio de la función son **los reales positivos** puesto que no existe el logaritmo de un número negativo Dom (f) = R +

2. APRENDIZAJE INDIVIDUAL (INDIVIDUAL LEARNING) 45 MINUTOS

ACTIVIDAD PREVIA:

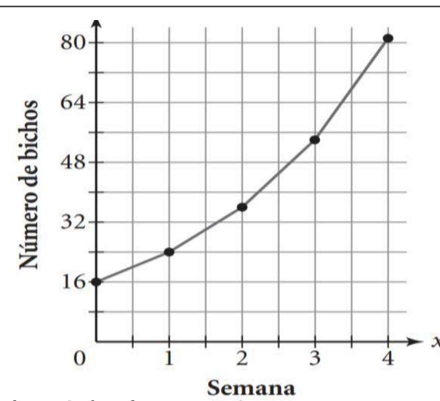
MATEMÁTICAS:

Investigación: Bichos, bichos, bichos…

Imagina que una población de bichos inicia con 16 y crece en 50% cada semana. En esta investigación observarás el patrón de cambio de esta población. Consigna en la siguiente tabla los resultados de las primeras semanas:

Semanas pasadas	***Numero total de bichos***	***Aumento en el número de bichos (razón de cambio)***	***Razón del total de la semana actual al total de la semana pasada***
Inicio (0)	16		
1	24	8	$\frac{24}{16} = 1{,}5$
2			
3			
4			

1. ¿La razón de cambio del número de bichos es constante?
   ____



2. Con ayuda de un gráfico relaciona el número de semanas con el número de bichos, une cada punto con segmentos.

   Observa que, a medida que te desplazas de izquierda a derecha, aumentan las pendientes de los segmentos de recta.

3. En la última columna de la tabla se muestra que la razón del número de bichos de cada semana al número de bichos de la semana anterior es constante. Esta razón constante es : _________

4. Encuentra las poblaciones para las semanas 5 a la 8. _____ _____ _____

5. ¿Qué patrón encuentras para obtener la población de la siguiente semana?
   ____
   ____

Participa de la socialización de ésta investigación con tus compañeros.

Conclusión: 1,5, es el número por el cual la población de cada semana debe multiplicarse para obtener la población de la siguiente. Así pues, a diferencia de los patrones lineales, en los que encuentras cada valor sumando un número constante al valor anterior, en este patrón encuentras cada valor multiplicando el valor anterior por un número constante.

Investigación: Automóvil usado…

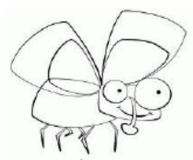
Modelos exponenciales de decrecimiento

Juan compró un automóvil por $16 000 0000. Se estima que el valor del auto disminuirá 15% cada año. ¿Cuánto valdrá el auto después de 4 años? ¿Después de 7 años?

Cada año el valor del auto disminuye en un 15% de su valor anterior, completa la siguiente tabla:

Año	*Valor inicial*	*Disminución de valor*	*Valor nuevo* = *Valor inicial – disminución del valor*
1	16 000 000	16 000 000 * 0,15 = 2 400 000	16 000 000 – 16 000 000 * 0,15 = 16 000 000 (1 – 0,15) = 13 600 000
2	13 600 000	13 600 000* 0,15 =2 040 000	13 600 000 –13 600 000 *0,15 = 13 600 000 (1 – 0.15)= 11 560 000
3			
4			

Para tener en cuenta: Para Modelar las dos situaciones anteriores se pueden utilizar funciones de crecimiento o decrecimiento exponencial, observa:



<u>Crecimiento poblacional de</u>

y = Población final
x = Número de semanas
Tasa de crecimiento semanal = 50 %

Población final

$$y = 16\ (1 + 0{,}5)^x$$

No. de semanas

Población Inicial

Tasa de crecimiento

Encuentra la población de moscas pasadas 12 semanas:

<u>Decrecimiento anual del valor del auto</u>

y = Valor final
x = Número de años
Tasa de decrecimiento anual = 15 %

Valor Final

No. de semanas

$$y = 16\ 000\ 000\ (1 - 0{,}15)^x$$

Valor Inicial

Tasa de decrecimiento

Encuentra el valor del auto pasados 10 años:

1.2 COEVALUACIÓN – COEVALUATION

En binas se valorará la evaluación del 5.1 junto con algunos aspectos manejados a lo largo de la guía

Estudiante que me evalúa: ___________________________________	**Valoración numérica**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Analiza gráficas de funciones cuadráticas a partir de su expresión algebráica.										
Representa gráficamente funciones cuadráticas.										
Elabora con orden, pulcritud y calidad las tareas propuestas en la guía.										
PROMEDIO DE LAS VALORACIONES										

5. APRENDIZAJE EN CASA (HOME LEARNING)

Realiza los numerales de la página que te indique el profesor del libro guía de Matemáticas 9°. *Para entregar en hoja examen, en la fecha*_________________________.

BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA – BIBLIOGRAPHY AND WEBGRAFY

- ALFONSO OROZCO, Luz. Y otros, PROYECTO SÉ. Bogotá: Editorial Ediciones SM, 2012.
- Wikipedia: Quadratic Function *(s.f.). Recuperado el 26 de mayo de 2012 de* http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_function