	COLEGIO METROPOLITANO DEL SUR **Resolución No. 0427 del 11 de Mayo de 2010** **GUIA 05**	

1. IDENTIFICACIÓN

Área: Matemáticas	**Asignatura:** Calculo	**Fecha:** 6 de julio de 2015	**Grado:** Undécimo
Nombre del Estudiante:			**Tema:** Funciones
Nombre del Docente: Luis Lozada Ruiz			**Tiempo:** 4 Semanas

RECURSOS – RESOURCES: Guía de Aprendizaje, Bibliografía sugerida, cuaderno de Profundización, calculadora científica.

OBJETIVOS–OBJECTIVES: Que el estudiante logre: Desarrollar habilidades superiores de pensamiento como el análisis, la síntesis, la abstracción y la transferencia a través de la elaboración de ejercicios de alto grado de dificultad y del planteamiento y la resolución de problemas no rutinarios.

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE – LEARNING STRATEGY: El desarrollo de los procesos de aprendizaje mediante el planteamiento y la resolución de problemas aplicados a la matemática y a otras ciencias.

INDICADORES DE DESEMPEÑO

INDICADOR DE DESEMPEÑO	DESEMPEÑOS
PROFUNDIZACIÓN MATEMÁTICAS: Formula y resuelve problemas de aplicación en diversos contextos, utilizando el concepto de función, generando modelos y relacionando diferentes representaciones matemáticas.	· Interpreta correctamente el enunciado de un problema, elaborando una lista de datos e identificando claramente la(s) pregunta (s) Planteada (s). · Elabora e interpreta gráficas geométricas de acuerdo con el enunciado de un problema. · Elabora modelos y resuelve ecuaciones inherentes a la situación problémica dada. · Verifica la(s) respuesta(s) contrastándola(s) con las condiciones iníciales del problema.

APRENDIZAJES ESPERADOS
Utilizar información conocida para analizar, explicar y demostrar el comportamiento de las funciones relacionando los diferentes tipos de representaciones: proposicional, tabular, simbólica y gráfica.

1. INDUCCIÓN (INDUCTION)

1.1 AMBIENTACIÓN - WARMING UP
A partir de este momento, penetrarás en el fascinante mundo de la profundización en matemáticas, al abordar el enriquecedor universo y la razón de ser de las matemáticas: **el planteamiento y la resolución de problemas**, tanto al interior de la matemática, como en las conexiones con otras disciplinas.
Las pruebas de profundización en matemática, elaboradas por el Icfes, evalúan las mismas componentes y competencias que conforman la prueba de núcleo común. **Lo que define el nivel de profundización es la complejidad de las preguntas**. Involucra problemas que te exigen una apropiación más significativa de los conceptos y estructuras matemáticas y una mejor aproximación al lenguaje formal y a las diferentes formas de representación; se tiende a dar prelación en este punto a los contextos matemáticos. No se trata, en esta componente de

indagar por gran cantidad de conocimientos básicos, sino por la apropiación significativa de los conceptos y estructuras de la matemática escolar, propuestos en los lineamientos y estándares de calidad. Es por esto que en el trabajo en la profundización pretendemos desafiarte a una mayor apropiación de los conceptos matemáticos, a explotar tu capacidad de análisis, representación y creatividad para reutilizar un conocimiento básico y poder profundizar en algunos conceptos matemáticos.

1.2 ACTIVACIÓN DE CONOCIMENTOS PREVIOS - PRIOR KNOWLEDGE

Amigo(a) estudiante: las matemáticas son un cuerpo dinámico de conocimientos en constante expansión; en la medida en que desarrollas y construyes las ideas matemáticas: recolectas información, descubres o creas relaciones, discutes tus ideas, planteas conjeturas y constantemente evalúas y contrastas resultados. De esta manera, el aprendizaje de las matemáticas se relaciona con la resolución de problemas al discutir diferentes estrategias y el significado de las soluciones.

A continuación encontrarás una serie de situaciones problémicas matemáticas no rutinarias que pondrán a prueba tu ingenio y creatividad. Para resolverlas es válido utilizar cualquier estrategia: esquemas, tablas, gráficas, ecuaciones, ensayo y error, trabajar de atrás hacia adelante, hacer conjeturas, etc.

1.2.1 La suma de las edades de Pedro y María es 25. La suma de las edades de Pedro y Juan es 20. La suma de las edades de María y Juan 31. ¿Cuál es el mayor de los tres y cuál es su edad?

1.2.2 De un montón de seis monedas de igual apariencia, se sabe que una pesa menos que las otras. ¿Cómo puede identificarse la moneda diferente, empleando solamente 2 veces una balanza de dos brazos?

1.2.3 El peso de una taza, junto con las canicas que contiene, es 50 onzas. Si se dobla el número de canicas que hay en la taza, su peso será de 92 onzas. ¿Cuánto pesa la taza? (Todas las canicas pesan lo mismo).

1.2.4 Tomemos un cubo que mide por cada lado 4 cm. Si duplicamos su lado, ¿qué ocurre con su volumen?

1.2.5 Un padre le dice a su hijo: "Te voy a dar $50 000, más la tercera parte de lo que me queda en la billetera". Si en total le da $120 000, ¿cuánto dinero tenía el papá en la billetera?

1.2.6 Un tanque contiene agua hasta dos quintas partes de su capacidad. Al agregar tres galones, el tanque se llena hasta la mitad. ¿Cuál es la capacidad del tanque?

1.2.7 Dos paneleros amigos compraron una garrafa de aceite (para el motor de su trapiche) de ocho galones y pretenden repartírsela en partes iguales, pero únicamente disponen de dos vasijas para medirlo: una de 5 galones y otra de 3. ¿Cómo lo lograrán?

1.2.8 La página social de un diario muestra tres fotografías sobre un acto celebrado en la compañía XXX, con motivo de la elección del presidente, vicepresidente, secretario y tesorero.

Los elegidos fueron los señores González y Ruiz, y las señoras Sánchez y Flórez.

En la primera foto, Ruiz y Flórez felicitan al vicepresidente. La segunda foto muestra a la ex-tesorera Flórez al posesionarse de su nuevo puesto. La tercera foto muestra a Sánchez, la primera mujer elegida presidenta de la compañía.

Con base en la información anterior, determina quién fue elegido para cada puesto.

1.3 META DE APRENDIZAJE - LEARNING GOAL

De acuerdo con los indicadores de desempeño y los aprendizajes esperados, escribe en términos claros y sencillos, tu propia meta de aprendizaje. Ten en cuenta que sea alcanzable, la estrategia, el tiempo dedicado, el manejo de información y las ayudas a utilizar para que realmente puedas llevar a cabo la meta propuesta.

1.4 INFORMACIÓN – INFORMATION

A continuación encuentras algunos apartes con información sobre funciones que te pueden ser de utilidad para el desarrollo del trabajo individual y grupal. También aparecen una serie de indicaciones que pueden ser importantes a la hora de resolver un problema.

FUNCIONES LINEALES

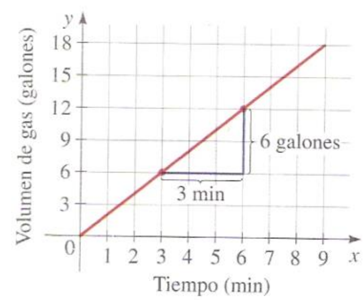
A. Formas de ecuación de la recta

Recuerda que las formas de ecuación de la recta, son:

- ✓ Ecuación general: $Ax + By + C = 0$
- ✓ Ecuación pendiente-intercepto: $y = mx + b$
- ✓ Ecuación punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- ✓ Ecuación de la recta vertical que pasa por (a, b): $x = a$
- ✓ Ecuación de la recta horizontal que pasa por (a, b): $y = b$
- ✓ Pendiente de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con ángulo de inclinación Θ:
- ✓ $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = \tan \Theta$

B. Aplicaciones: pendiente como razón de cambio

Cuando una recta se utiliza como modelo de la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **razón de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la siguiente figura muestra la cantidad de gas de un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es m = 6 galones/3 minutos = 2 galones por minuto.



Resolver un problema es como armar un rompecabezas; no se logra en forma inmediata. Hay que tener paciencia, se debe leer totalmente varias veces y también de manera fragmentada (por partes) y mientras el enunciado no se haya entendido, no intentar resolverlo.

Generalmente, se debe comenzar planteando la pregunta (lo que nos piden verificar, demostrar, encontrar o calcular) y a partir de allí continuar el análisis.

Al entrar a resolver cualquier problema es necesario:

- Leer detenidamente el enunciado (total y parcialmente) hasta estar seguro de haberlo comprendido.
- Hacer un listado que identifique los datos y las preguntas. Si es posible, ilustrar mediante un gráfico.
- Determinar el proceso a seguir relacionando los datos y las variables.
- Plantear las ecuaciones y/o resolver las operaciones necesarias escribiendo, si es posible, frases explicativas en cada paso.
- Escribir la(s) respuesta(s) confrontando que corresponda a las condiciones dadas en el enunciado del problema (si es o no lógica).

2. APRENDIZAJE INDIVIDUAL (INDIVIDUAL LEARNING)

Los ejercicios y problemas propuestos en el trabajo individual son sencillos y plantean retos personales, mientras que los problemas propuestos en el trabajo de grupo son más complejos y por tanto necesitarás de un verdadero trabajo en equipo.

Se recomienda desarrollar durante cada clase (incluyendo el **aprendizaje en casa**) en promedio, de tres a cuatro ejercicios del trabajo individual y otro tanto del trabajo de grupo; así lograrás durante las nueve unidades de clase que están programadas para este periodo, terminar por completo la presente guía de aprendizaje.

Resuelve los siguientes ejercicios y problemas, utiliza siempre hojas cuadriculadas o de ser necesario papel milimetrado:

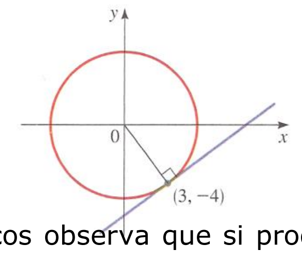
Traza la gráfica de la ecuación lineal

2.1 Utiliza las pendientes para demostrar que A(-3, -1), B(3, 3) y C(-9, 8) son los vértices de un triángulo rectángulo.

2.2 Determina una ecuación de la mediatriz del segmento de recta que une los puntos A(1, 4) y B(7, -2).

2.3 Calcula el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta 3x + 2y – 6 = 0.

2.4 Calcula una ecuación para la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, -4).
¿En qué otro punto de la circunferencia una tangente será paralela a la tangente del literal a)?



2.5 **Costos de producción.** Un fabricante de electrodomésticos observa que si produce x cafeteras en un mes, su costo de producción está representado por la ecuación y = 6x + 3000 donde **y** se mide en dólares.
a) ¿Cuál es valor de 20 cafeteras?
b) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada en el origen de la gráfica?

2.6 **Escalas de temperatura.** La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) se expresa mediante la ecuación F = (9/5)C + 32.
a) Completa la tabla siguiente para comparar las dos escalas en los valores dados.
b) Determina la temperatura a la cual las dos temperaturas concuerdan. Sugerencia: suponga que **q** es la temperatura a la cual las escalas Concuerdan. Haz F=q y C=q. Luego determina q.

C	F
-30^0	
-20^0	
-10^0	
0^0	
	50^0
	68^0
	86^0

2.7 **Crecimiento fetal.** El crecimiento de un feto de más de 12 semanas de gestación se calcula mediante la fórmula L = 1.53t – 6.7, donde L es la longitud (en cm) y t es el tiempo (en semanas). La longitud prenatal se puede determinar por ultrasonido. Calcula la edad de un feto cuya longitud es 28 cm. Rta. 23 semanas aproximadamente.

2.8 Un vendedor de materiales para construcción gana mensualmente un sueldo básico de $ 600 000 más una comisión de 1% sobre el monto de las ventas.
a) Halla la expresión para calcular el sueldo mensual S en términos de las ventas
b) ¿Cuánto debe vender en un mes para ganar un millón de pesos?

2.9 Una rampa para permitir el acceso a un supermercado va a ser construida con una pendiente del 3%. Si la entrada al edificio del supermercado se encuentra a 1.2 metros del piso, ¿qué longitud debe tener la base de la rampa? Rta. 40 m

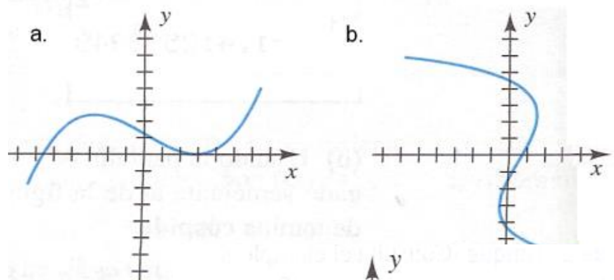
2.10 **Calculo de salinidad.** La salinidad de los océanos se refiere a la cantidad de material disuelto que se encuentra en una muestra de agua marina. Las salinidad S se puede calcular a partir de la cantidad C de cloro en agua de mar con la ecuación S= 0.03 + 1.805C, donde S y C se miden por peso en partes por millar. Calcula C si S es 0.35. Rta. 0.177

2.11 **Estadísticas en beisbol.** un jugador de las grandes ligas ha conectado 5 home-runs en los primeros 14 juegos, y mantiene este paso toda la temporada de 162 encuentros.
a) Proporciona el número **y** de home – runs en términos de la cantidad x de juegos jugados.
Rta. y = (5/14)x
b) Cuántos home-runs conectará el jugador en la temporada. Rta. 58

2.12 Calculo de valores de una función.

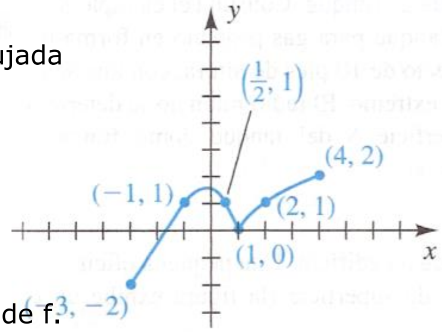
Si f(X) = $\frac{x}{x-3}$, halla f(-2), f(0) y f(3). Rta. $\frac{2}{5}$, 0 , Indefinida.

2.13 Explica por qué la gráfica corresponde o no a una función.



2.14 Para la gráfica de la función f dibujada en la siguiente figura, Determina:

a) El dominio
b) El rango
c) f(1)
d) toda x tal que f(x) = 1
e) Toda x tal que f(x)>1



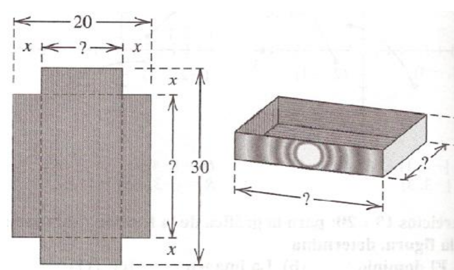
2.15 En cada caso, encuentra el dominio de f.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 4x}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{4x-3}}{x^2 - 4}$

Rta: a) R ≠ -2,0,2 b) (-∞; -5] U [5; ∞) c) $[\frac{3}{4}; 2)\ U\ (2; \infty)$

2.16 Construcción de una caja. A partir de una pieza rectangular de cartón de 20 x 30 pulg. , hay que elaborar una caja, cortando cuadrados idénticos de área x^2 de cada esquina y volteando hacia arriba los lados como se ve en la figura. Expresa el volumen V de la caja como función de x.

Rta. V(x) = 4x(15-x)(10-x)



2.17 Rapidez de crecimiento infantil. La rapidez **y** de crecimiento (en libras por mes) de un menor está relacionada con el peso actual x (en libras: lb) por la fórmula Y = cx(21-x), donde c es una constante positiva y 0<x<21. ¿a qué peso se presentará la máxima rapidez de crecimiento? Rta. 10.5 lb

2.18 La ecuación de la trayectoria de una bola de golf que se lanza formando un ángulo de 45º con la horizontal es y = $x - \frac{x^2}{50}$, donde (x,y) son las componentes horizontales y verticales del movimiento parabólico. Halla la altura y el alcance máximo de dicho movimiento.

2.19 Rendimiento de gasolina. El número de millas M que cierto automóvil puede recorrer con un galón de gasolina, a una velocidad de v mi/h, esta dado por $M = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v$, para 0 < v < 70.

a) Indica la velocidad más económica para un viaje. Rta. 37.5 mi/h
b) Proporciona el valor máximo de M. Rta. 46.875 mi/gal

2.20 Composición de funciones. Dadas las funciones f(x) = $3x^2 + 4$, g(x)= 5x , encuentra:

a) (fog)(x) **b)** (gof)(x) **c)** f [g(-2)] **d)** g [f(3)]

Rta. a) $75x^2 + 4$ b) $15x^2 + 20$ c) 304 d) 155

2.21 Incendio que se propaga. Un incendio ha comenzado en un campo abierto y seco y se propaga en forma de círculo. Si el radio de este aumenta a razón de 6 pies/min, expresa el área total A del incendio como función del tiempo t (en min). Rta. A(t) = 36π t^2

2.22 Dimensiones de un globo. Se infla un globo esférico a $\frac{9}{2}\pi\, pies^3/min$. Expresa su radio r como función del tiempo t (en min). Sea r = 0 cuando t = 0. Rta. R(t)= $\frac{3}{2}\sqrt[3]{t}$

2.23 Polinomio de Legendre. El polinomio de Legendre de tercer grado P(x)= $\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ aparece en la solución de problemas de transferencia de calor en física e ingeniería. Halla todos los valores de x tales que P(x) > 0 y P(x) < 0 y traza la gráfica de P.

2.24 Dosis de medicamento. El cuerpo elimina cierto fármaco a través de la orina. Supón que para una dosis inicial de 10mg, la cantidad A(t) en el cuerpo, t horas después de administrada, está dada por A(t) = $10(0.8)^t$.

a) Estima la cantidad de medicamento en el cuerpo 8 horas después de la dosis inicial. Rta. 1.68 mg

b) ¿Qué porcentaje del producto que permanece en el cuerpo se elimina cada hora? Rta. 20%

2.25 Crecimiento bacteriano. La cantidad de bacterias en cierto cultivo aumenta de 600 a 1800 entre las 7:00 a.m. y las 9:00 a.m. suponiendo un crecimiento exponencial, la cantidad f(t) de bacterias t horas después de las 7:00 a.m. está dada por f(t) = $600(3)^{t/2}$.

a) Calcula la cantidad de bacterias en el cultivo a las 8:00 a.m. y a las 11:00 a.m. Rta. 1039 y 5400.

b) Traza la gráfica de f para 0 ≤ t ≤ 4.

2.26 Ley de Newton del enfriamiento. Según esta ley, la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia en temperatura entre el objeto y el medio circundante. La cara de una plancha doméstica se enfría de 125^0 a 100^0 en 30 minutos en un cuarto que permanece a una temperatura constante de 75^0. Por cálculo integral, la temperatura f(t) de la cara de la plancha, después de t horas de enfriamiento, está dada por $f(t)=50(2)^{-2t} + 75$.

Supón que t=0 corresponde a la 1:00 p.m. y calcula, al décimo de un grado más cercano, la temperatura a las 2:00 p.m. y 4:00 p.m. Rta. 87.5^0 y 75.8^0

2.27 Resuelve ordenadamente las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_5(2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$ Rta. x = 15

b) $\log_2 x + \log_2 (x+2) = 3$ Rta. x = 2

c) ln(x + 6) - ln 10 = ln (x -1) – ln 2 Rta. x = 11/4

2.28 SAY IT IN ENGLISH

PRE READING. Read the following information and highlight the main ideas. Give some more examples.

<u>INTRODUCTION TO FUNCTIONS</u>

In everyday life, many quantities depend on one or more changing variables:

(a) plant growth depends on sunlight and rainfall

(b) speed depends on distance travelled and time taken

(c) voltage depends on current and resistance

(d) test marks depend on attitude, listening in lectures and doing tutorials (among many other variables!!)

READING. Read the following information and underline key concepts.

<u>FUNCTIONS</u>

A function is a rule that relates how one quantity depends on other quantities. For example,

(a) $V = IR$ where
V = voltage (V)
I = current (A)
R = resistance (Ω)

If I increases, so does the voltage (assuming resistance is constant).
If R increases, so does the voltage (assuming current is constant).

(b) $s = \frac{d}{t}$, where
s = speed (m / s)
d = distance (m)
t = time taken (s)

If d increases, the speed goes up (assuming time is constant).
If t increases, the speed goes down (assuming distance is constant).

DEFINITION OF A FUNCTION

Whenever a relationship exists between two variables (or quantities) such that for every value of the first, there is only *one* corresponding value of the second, then we say:
The second variable is a function of the first variable. The first variable is the *independent* variable (usually x), and the second variable is the *dependent* variable (usually y). The independent variable and the dependent variable are *real numbers*.

FUNCTIONS FROM VERBAL STATEMENTS

Example 1.

The fixed cost for a company to operate a certain plant is $3,000 per day. It also costs $4 for each unit produced in the plant. Express the daily cost C of operating the plant as a function of the number n of units produced.

Answer

The daily total cost C equals the fixed cost of $3,000 plus the cost of producing n units.
Since the cost of producing 1 unit is $4, the cost of producing n units is 4n$
Thus the total cost C, where $C = f(n)$ is $C = 3000 + 4n$
Here the domain is "all integer values, $n \geq 0$" while the range is "all integer values, $C \geq 3000$"

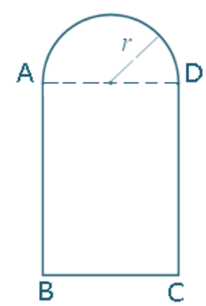
POST READING. Based on Example 1, solve the following situation.

Example 2.

An architect designs a window such that it has the shape of a rectangle with a semicircle on top, as shown. (This kind of window is called a Norman window). The architect wants the base of the window to be 10 cm less than the height of the rectangular part.
Express the perimeter p of the window as a function of the radius r of the circular part.

Answer

We label the points on the window for convenience:



_

_

_

_

3. APRENDIZAJE DE GRUPO (GROUP LEARNING)

A continuación se plantean una variedad de problemas de aplicación en diversos contextos y en conexión con otras disciplinas.

- ✓ Tengan en cuenta las preguntas planteadas en la **coevaluación** al final de esta guía, pues les serán de gran utilidad para desarrollar un verdadero trabajo en equipo.
- ✓ Al finalizar la solución de cada problema, elaboren (incluyan, redacten) **una pregunta** que tenga que ver o que sea inherente al planteamiento y al contexto del problema.

Los problemas que no alcancen a realizar en clase, los desarrollan en casa (APRENDIZAJE EN CASA).

Resuelvan los siguientes **problemas de aplicación**:

3.1 Depreciación. Una empresa compra computadores a 1000 dólares la unidad. Después de dos años, el valor esperado del computador será de 200 dólares. Para cuestiones de contabilidad, la empresa aplica la **depreciación lineal** para evaluar el valor del computador en un tiempo dado. Esto significa que si V es el valor del computador en el tiempo **t**, entonces se usa una ecuación lineal para relacionar V y **t**.

a) Determinen una ecuación lineal que relacione V y **t.**
b) Grafiquen la ecuación lineal.
c) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje V de la gráfica?
d) Calculen el valor depreciado del computador tres años después de la fecha de compra.

3.2 Presión y profundidad. En la superficie del mar, la presión del agua es la misma que la presión del aire por arriba del agua, 15 lb/pulg^2. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta 4.34 lb/pulg^2 por cada 100 pies que se descienden.

a) Determinen una ecuación para la relación entre presión y profundidad debajo de la superficie del mar. Rta. P = 0.434d + 15 donde P es la presión en lb/pulg^2 y d es la profundidad en pies.
b) Tracen la gráfica de esta ecuación lineal.
c) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada en el origen de la gráfica?
Rta. La pendiente es la rapidez de incremento en la presión del agua, y la ordenada al origen es la presión del aire en la superficie.
d) ¿A qué profundidad se tiene una presión de 100 lb/pulg^2? Rta. 196 pies

3.3 Costos renta auto. El costo mensual de manejar un automóvil depende de la cantidad de millas recorridas. Jorge observa que, en mayo, el costo de manejo fue de 380 dólares por 480 millas y que en junio el costo fue de 460 dólares por 800 millas. Supón que hay una relación lineal entre el costo mensual **C** por manejar un automóvil y la distancia recorrida **d**.

a) Encuentren una ecuación lineal que relacione C y d. Rta. C = 0.25d + 260
b) Usen la ecuación anterior para predecir el costo por manejar 1500 millas al mes. Rta. $635
c) Tracen la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente de la recta?
Rta. La pendiente representa el costo por milla
d) ¿Qué representa la ordenada en el origen de la gráfica? Rta. La ordenada al origen representa el costo fijo mensual.
e) ¿Por qué una relación lineal es un **modelo** adecuado en el caso de esta situación?

3.4 Costos de producción. El gerente de una fábrica de muebles observa que cuesta 2 200 dólares manufacturar 100 sillas en un día y 4 800 dólares producir 300 sillas en un día.

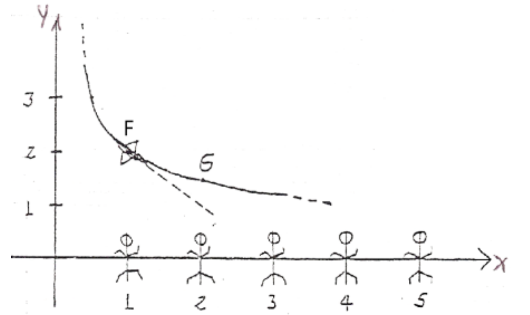
a) Si se supone que la relación entre costo y número de sillas fabricadas es lineal, encuentren una ecuación que exprese esta relación. Grafiquen la ecuación.
b) ¿Cuál es la pendiente de la recta y qué representa?
c) ¿Cuál es la ordenada al origen de esta recta y qué representa?

3.5 Peso en la infancia. Un bebe pesa 10 libras (lb) al nacer y 3 años después alcanza 30 lb. Supón que el peso W (en lb) en la infancia está relacionado linealmente con la edad t (en años).

a) Expresen W en términos de t. Rta. W = (20/3)t +10
b) ¿Cuál será W cuando el niño cumpla 6 años? Rta. 50 lb.
c) ¿A qué edad pesará 70 lb? Rta. 9 años
d) En un plano tracen una gráfica que muestre la relación entre W y t para $0 \leq t \leq 12$.

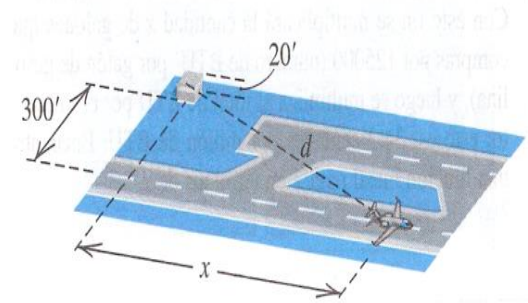
3.6 Isla de calor urbano. El fenómeno de la isla de calor urbano se ha observado en Tokio. El promedio de temperatura era de 13.5 °C en 1915, y desde entonces ha subido 0.032 °C por año.

- **a)** Consideren que la temperatura T (en °C) está linealmente relacionada con el tiempo t (en años) y que t=0 corresponde a 1915; expresa T en términos de t. Rta. T= 0.032t + 13.5
- **b)** Hagan un pronóstico del promedio de temperatura para el año 2000. Rta. 16.22 °C

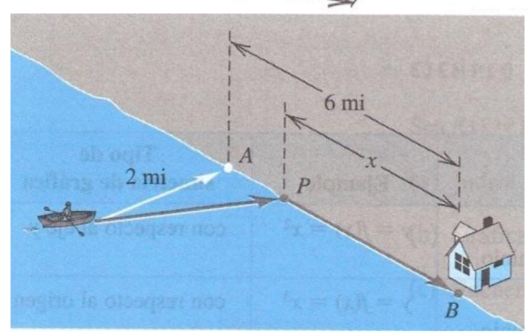


3.7 Juegos de video. En el juego de video que se ve en la figura, un aeroplano vuela de izquierda a derecha a lo largo de la trayectoria representada por $y = 1 + \frac{1}{x}$, y dispara proyectiles en dirección tangente a la trayectoria, a blancos que están a lo largo del eje x en las posiciones x = 1, 2, 3, 4 y 5. Se sabe que la pendiente de la tangente a la trayectoria en F(1,2) es m = -1, y en G(2, $\frac{3}{2}$) es m = - $\frac{1}{4}$. determinen si los proyectiles darán en algún blanco si el avión los dispara cuando está en:

- **a)** F
- **b)** G

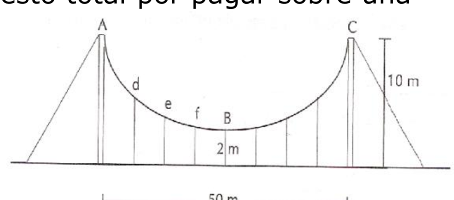


3.8 Pista de aterrizaje. Las posiciones relativas de una pista y una torre de control de 20 pies de altura se muestran en la figura. El comienzo de la pista esta a 300 pies de la base de la torre en sentido perpendicular. Si x denota la distancia que un avión ha recorrido en la pista, expresen la distancia **d** entre la nave y la torre de control como función de x.
Rta. $d(x) = \sqrt{90400 + x^2}$



3.9 Tiempo de llegada. Un remero se encuentra a 2 millas del punto más cercano de una orilla recta (representado con A) y desea llegar a una casa ubicada en un punto B a 6 millas corriente abajo en la orilla. Piensa remar al punto P, que está entre A y B y a **x** millas de la casa, y luego caminar el resto de la distancia. Supongan que rema a razón de 3 mi/h y camina a 5 mi/h. Ahora bien, si T es el tiempo total requerido para llegar a la casa, expresen T como función de x.
Rta. $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}{3} + \frac{x}{5}$

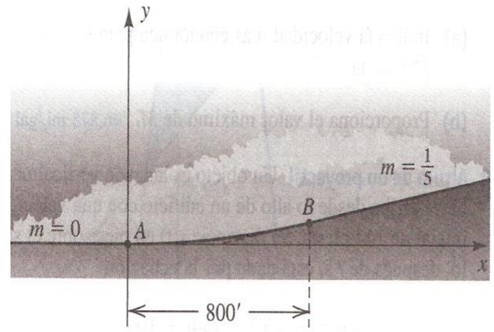
3.10 Impuestos. Un estado grava los primeros $500 000 de valor de las propiedades con una tasa de 1%; todo el valor que rebasa esos $500 000 se grava a 1.25%. hallen una función T definida por partes que permita especificar el impuesto total por pagar sobre una propiedad valuada en x dólares.



3.11 Se desea construir un puente con la forma y dimensiones que se muestran en la siguiente figura. Encuentren la ecuación descrita por el arco ABC. Úsala para calcular la longitud de los cables intermedios f, e.

3.12 Entrada parabólica. La entrada a un edificio tiene la forma de un arco parabólico y mide 9 pies de alto en el centro y 6 pies de ancho en la base. Si hay que meter una caja rectangular de 8 pies de alto, ¿cuál es el ancho máximo que puede tener la caja?. Rta. 2 pies.

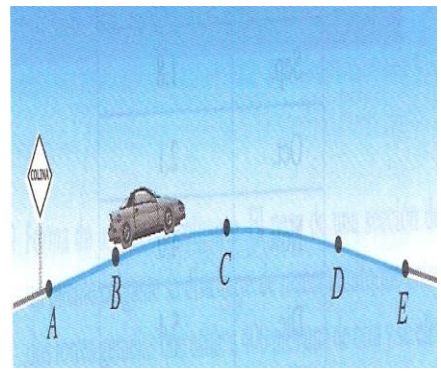
3.13 Diseño de una carretera. Un grupo de ingenieros diseña un tramo que enlazará una autopista horizontal con otra que tiene una pendiente de 20% (esto es, pendiente 1/5), como se ilustra en la figura. La transición suave se efectuará a lo largo de 800 pies, y un tramo parabólico de la carretera servirá para enlazar los puntos A y B. Si la ecuación del segmento parabólico es de la forma y = ax^2 +bx+ c , es posible demostrar que la pendiente de la línea tangente al punto P(x,y) sobre la parábola está dada por m= 2ax +b.



a) Encuentren una ecuación de la parábola que tenga una línea tangente de pendiente 0 en A y 1/5 en B. Rta. y = $\frac{1}{8000}x^2$

b) Proporcionen las coordenadas de B. Rta. (800,80)

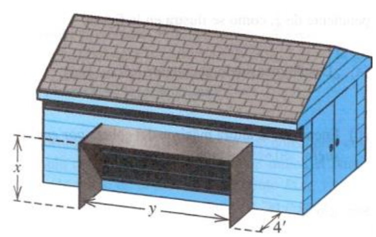
3.14 Curvas en cimas de carreteras. Cuando los ingenieros planean la construcción de carreteras, deben diseñar colinas a fin de producir una visibilidad adecuada para los conductores. Las curvas en cimas modifican la pendiente de una carretera. Los ingenieros usan una forma parabólica para una colina de carretera, con el vértice ubicado en la cima. Dos carriles con diferentes pendientes se deben unir con una curva de cima parabólica. La carretera pasa por los puntos A (-800, -48), B(-500, 0), C (0,40), D(500,0) y E (800, -48), según se aprecia en la figura.



El carril es lineal entre A y B, parabólico entre B y D, y otra vez lineal entre D y E. Encuentren una función **f,** definida por partes, que sea **modelo matemático** del carril entre los puntos A y E.

3.15 Corrosión de cables. Un cable de 100 pies de largo y 4 pulgadas de diámetro está sumergido en el mar. Debido a la corrosión, el área superficial del cable disminuye a razón de 750 $pulg^2$ por año. Expresen el diámetro **d** del cable como función del tiempo t (en años). (Desprecia la corrosión en los extremos del cable). Rta. d(t) = $4 - \frac{5}{8\pi}t\ (pulg)$

3.16 Construcción de un cobertizo. Un cobertizo rectangular abierto, hecho de dos lados verticales de 4 pies de ancho y un techo plano, se va a construir junto a una estructura ya existente, como se ve en la figura. El techo plano esta hecho de hojalata y cuesta $5 por pie^2 , y los dos lados son de madera contrachapada que cuesta $2 por pie^2.



a) Si se dispone de $400 para la construcción, expresen la longitud **y** como función de la altura x. Rta. y = $-\frac{4}{5}x + 20$

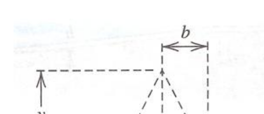
b) Encuentren el volumen V dentro del cobertizo como una función de x. Rta. V(x)= $4x(-\frac{4}{5}x + 20)$

3.17 Construcción de una caja. Se va a fabricar una caja sin tapa a partir de un cartón rectangular de 20 x 30 pulgadas, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados (ver ejercicio 16 del trabajo individual).

a) Demuestren que el volumen de la caja está dado por la función V(x) = x(20 – 2x)(30 - 2x).

b) Encuentren todos los valores positivos de x tales que V(x) > 0 y traza la gráfica de V para x > 0.

3.18 Tronco de cono. la forma de la primera nave espacial del programa Apolo tenía la



forma del tronco de un cono circular recto; esto es, un sólido formado por un cono truncado por un plano paralelo a su base. Para el tronco de la figura, los radios a y b ya se definieron.

a) Utilicen triángulos semejantes y expresen **y** como función de h. Rta. $y(h)= \frac{bh}{a-b}$

b) Deduzcan una fórmula para hallar el volumen del tronco como función de h. RTa. $V(h) = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

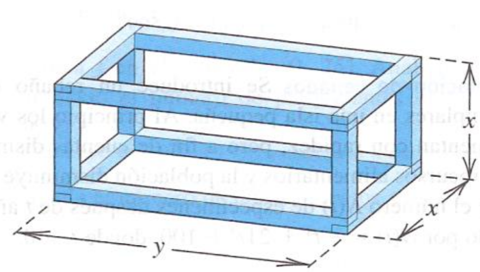
c) Si a = 6 pies y b= 3 pies, ¿para qué valor de h el volumen del tronco alcanza es 600^3? Rta. $\frac{200}{7\pi}$

3.19 Población de venados. Se introduce un rebaño de 100 ejemplares en una isla pequeña. Al principio los venados aumentan con rapidez; pero a fin de cuentas disminuyen los recursos alimentarios y la población disminuye. Supongan que el número N(t) de especímenes después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 +100$, donde $t > 0$.

a) Hallen los valores de t para los que $N(t) > 0$ y traza la gráfica de N. Rta. $0 < t < 5$

b) ¿Se extingue la población de venados? Si es así, ¿cuándo desaparecerá? Rta. sí, al cabo de 5 años.

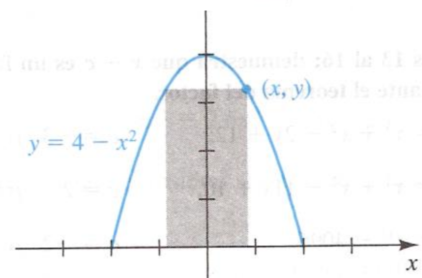
3.20 Bastidor para una caja. El bastidor para una caja debe construirse con 24 pies de madera de 2 x 2 pulgadas.



a) Si la caja debe tener extremos cuadrados de x pies por lado (Ver figura), expresen el volumen exterior V del armazón como función de x. (desprecien el grosor de la madera).
Rta. $V= 6x^2 -2x^3$

b) Dibujen la gráfica de V para $x > 0$.

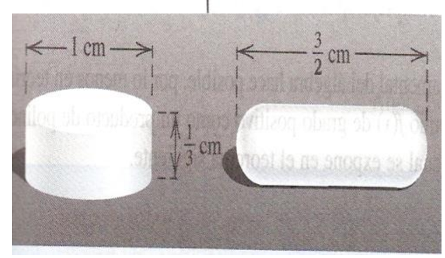
3.21 Arco parabólico. Una arco tiene la forma de la parábola $y=4-x^2$. Se escoge un punto (x,y) de la parábola y se coloca un rectángulo bajo el arco.



a) Expresen el área A del rectángulo en términos de x. Rta. $A= 8x -2x^3$

b) Si x=1, el rectángulo tiene base 2 y altura 3. Hallen la base de un segundo rectángulo que tenga la misma área. Rta. $\sqrt{13}$ - 1

3.22 Dimensiones de una tableta. Una tableta de aspirina en forma de cilindro circular recto tiene una altura de 1/3 cm y radio ½ cm; el fabricante desea vender la aspirina en tabletas de 3/2 cm de largo, en forma de cilindro circular recto con extremos redondeados.



a) Si r denota el radio de una semiesfera, encuentren una fórmula para establecer el volumen de la tableta. Rta. $V= \pi r^2(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}r)$

b) Encuentren el radio de la tableta, de modo que su volumen sea igual al de la otra. Rta. ¼ cm

3.23 Ventilación. La ventilación es una forma eficiente de mejorar la calidad del aire en interiores. En restaurantes donde no se permite fumar, las necesidades de circulación del aire (en $pies^3/min$) están dadas por la función $V(x) = 35x$, donde x es la cantidad de personas en el comedor.

a) Hallen las necesidades de ventilación para 23 personas. Rta. 805 $pies^3/min$

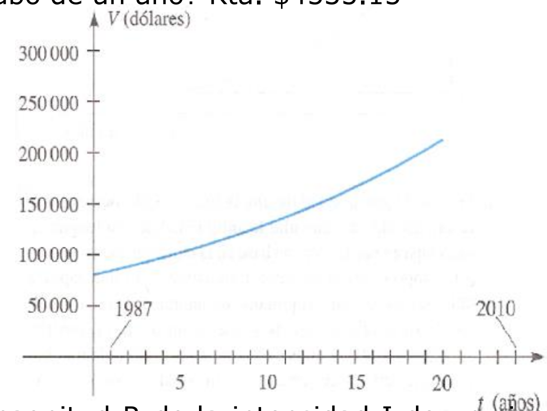
b) Encuentren $V^{-1}(x)$. explica el significado de V^{-1}. Rta. $V^{-1}(x) = (1/35)x$; número máximo de personas que pueden estar en el restaurante.

c) Utilicen V^{-1} para establecer el cupo máximo de un restaurante con una capacidad de ventilación de 2350 $pies^3/min$. Rta. 67

3.24 Interés compuesto. La fórmula para hallar el interés compuesto que produce un capital inicial C a una tasa de interés i durante un tiempo t (en años, con n períodos durante cada año), está dada por $A = C(1 + \frac{i}{n})^{nt}$ donde:

C = Capital inicial
i = tasa de interés anual expresada como decimal
n = períodos de interés por año.
t = años que se invierte C
A = cantidad acumulada después de t años.
Si un fondo de ahorros paga interés a razón de 10% anual compuesto semestralmente, ¿cuánto habrá que invertir para tener $5000 al cabo de un año? Rta. $4535.15

3.25 Avalúo de bienes raíces. Si el valor inmobiliario crece a razón de 5% anual, después de t años el valor V de una casa comprada en P dólares es $V = P(1.05)^t$. En la figura se muestra una gráfica para determinar el valor de una propiedad adquirida en $80 000 en 1986. Calculen su valor, a los $1000 más cercanos, en el año 2010.
Rta. $258000



3.26 Escala de Richter. En la escala Richter, la magnitud R de la intensidad I de un sismo está dada por $R = Log\frac{I}{I_0}$, donde I_0 es cierta intensidad mínima.

a) Si la intensidad de un sismo es $1000I_0$, encuentren R. Rta. R=3
b) Expresen I en términos de R e I_0 Rta. $I = I_0 \cdot 10^R$

3.27 Ley de Newton del enfriamiento. Esta ley señala que la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. La ley de Newton puede utilizarse para demostrar que, bajo ciertas condiciones, la temperatura T (en °C) de un objeto en un tiempo t (en horas) está dada por $T = 75e^{-2t}$. Expresen **t** como función de **T**. Rta. $t = -\frac{1}{2}ln\frac{T}{75}$

4. EVALUACIÓN (EVALUATION)

La función de esta evaluación es obtener información acerca del estado de tu aprendizaje para que puedas hacerte cargo de dicho proceso. Solo en la medida en que hagas conciencia de que la responsabilidad y la decisión de aprender son tuyas, podrás lograr una verdadera comprensión y un manejo óptimo de tus conocimientos.
En todas las actividades que desarrollamos diariamente encontramos facilidades y dificultades, aciertos y errores, fortalezas y debilidades. En la medida en que podamos darnos cuenta de ellos, encontramos cómo ser mejores. Con la auto evaluación el estudiante ve lo que ha alcanzado en cada indicador y lo que debe mejorar según su reflexión. Con la coevaluación puede tener el aporte de sus compañeros para reconocer sus fortalezas y superar sus dificultades, y con la heteroevaluación, el profesor, desde su visión profesional ayuda a mejorar o alcanzar los logros propuestos.

4.1 AUTOEVALUACIÓN

Desde el punto de vista que aquí nos ocupa, el conocerme a mí mismo con rigor me proporciona ante todo la posibilidad de utilizar mis propios recursos de la forma más eficaz posible, con la consiguiente satisfacción por el sano ejercicio de mi propia capacidad y porque con ello alcanzaré con seguridad un rendimiento más pleno.
Si me conozco a fondo a mí mismo en lo que se refiere a mi capacidad para **resolver problemas**, sabré cuáles son mis puntos fuertes, aquellas destrezas en las que manifiesto un cierto gusto especial y una señalada capacidad. Esto me proporcionará una pista sobre el tipo de problemas en los que tengo más confianza y probablemente más éxito. Y al mismo tiempo

sabré en qué puedo ayudar a otros con más eficacia.
Conociéndome con objetividad sabré también de mis defectos, seré capaz de disolver posibles engaños sobre mí mismo y estaré atento a cualquier posibilidad de fallo. Así pondré manos a la obra para subsanar mis carencias.
Contesta, con toda sinceridad, las siguientes preguntas y justifica las respuestas:

4.1.1 Generales

- ¿Le dedico tiempo suficiente a mis compromisos?
- ¿Manejo una lista de prioridades?
- ¿Qué tan comprometido me siento con mi aprendizaje, mis relaciones sentimentales, personales o familiares?
- ¿Respeto las opiniones de los que me rodean?
- ¿Escucho con atención?
- ¿Me conformo con lo que me dicen?
- ¿Qué hago cuando me equivoco?
- ¿Realizo mis trabajos con calidad?

4.1.2 Aspectos externos

- ¿Qué es lo que favorece en mi concentración? El silencio, la paz, la tranquilidad, la música (¿qué música?), estar en la alcoba o tal vez al aire libre?
- ¿Qué es lo que más me dispersa? Teléfono, chismes, interrupciones, …
- ¿Necesito dormir mucho, poco?

4.1.3 Aspectos afectivos

- Ante la tarea de resolución de problemas, ¿cuál es mi actitud afectiva inicial? ¿gusto, disgusto, miedo, angustia, repugnancia, tranquilidad, diversión, indiferencia, prisa, confianza, desaliento…?
- ¿Qué busco en mi tarea de resolución de problemas? ¿Entretenimiento, ejercicio, cumplimiento de un deber, satisfacción de mi curiosidad, auto superación, preparación más eficaz…?
- ¿Me cuesta ponerme en marcha? ¿Ante qué tareas?
- ¿Soy de esfuerzos prolongados? ¿Mantengo vivo el interés por un problema por largo tiempo o me canso y me aburro fácilmente?
- Mi estado de ánimo respecto del estudio ¿es fácilmente influenciable? ¿Tiempo, estómago vacío, lleno, mañana, tarde, noche…?
- En el estudio, ¿qué me produce más placer: pensar autónomo, observar, mirar lo que hacen los otros, explorar, contemplar, repetir, repasar, asegurarme, no trabajar? ¿Qué es lo que más me cuesta?
- ¿Cómo me debo catalogar en cuanto a mis tendencias: impulsivo, apresurado, sereno, pausado, optimista, pesimista…?
- El fracaso, ¿me hunde o trato de aprender con él?
- ¿Me gusta trabajar en equipo? ¿Me adapto bien? ¿O me gusta más bien trabajar por mi cuenta?

4.1.4 Aspectos cognoscitivos

- ¿Siento atracción por lo que desconozco?
- La fase de búsqueda y organización de información, ¿me resulta costosa, antipática, o es lo que más hago a gusto?
- ¿Tengo facilidad para la concentración y me defiendo fácilmente de distracciones?
- ¿Qué tal memoria tengo? ¿Qué tipo de memoria es la mía: visual, auditiva, analítica, simbólica, relacional?
- ¿Tengo facilidad para percibir, imaginar, visualizar? ¿Pienso en figuras o prefiero manejar símbolos?
- ¿Qué es lo que más me sorprende de la forma de abordar los problemas por otros?

4.1.5 Estrategias de aprendizaje.

Contesta las siguientes preguntas:

4.1.5.1 ¿Recolectaste información? ¿Cómo?
4.1.5.2 ¿Descubriste o creaste relaciones matemáticas? ¿Cuáles?

4.1.5.3 ¿Discutiste tus ideas, planteaste conjeturas e hiciste tus propias preguntas? ¿Cuáles?
4.1.5.4 ¿Aprendiste de tus errores?
4.1.5.5 ¿Contrastaste tus resultados a la luz de los datos ofrecidos en el enunciado de los problemas?
4.1.5.6 Al entrar a resolver los problemas de aplicación:
4.1.5.6.1 ¿Leíste detenidamente los enunciados (total y parcialmente) hasta comprenderlos?
4.1.5.6.2 ¿Hiciste un listado para identificar los datos y las preguntas? ¿Ilustraste mediante gráficas?
4.1.5.6.3 ¿Determinaste el proceso a seguir relacionando los datos y las variables?
4.1.5.6.4 ¿Planteaste las ecuaciones y resolviste las operaciones necesarias escribiendo las frases explicativas en cada paso?

4.2 COEVALUACIÓN

Durante el trabajo de grupo, ustedes identificaron el rol que han desempeñado. Seguramente, tuvieron la oportunidad de intercambiar y proponer ideas que enriquecieron su desarrollo intelectual y su capacidad para trabajar en equipo. Analicen y evalúen, de forma cualitativa, las fortalezas y las oportunidades de mejora al interior de cada grupo. Contesten **sí** o **no** y hagan las aclaraciones necesarias:

4.2.1 ¿Disponía el grupo de información suficiente?
4.2.2 ¿Tenían claridad sobre el trabajo a realizar?
4.2.3 ¿Elaboraron el trabajo totalmente? ¿Parcialmente? ¿No lo elaboraron?
4.2.4 ¿Se mantenía el grupo unido por la tarea en común?
4.2.5 ¿Había interés por llevar a cabo el trabajo?
4.2.6 ¿Todos hicieron sus respectivos aportes?
4.2.7 ¿Se mantuvieron centrados en el tema?
4.2.8 ¿El ambiente grupal era formal o informal?
4.2.9 ¿Las relaciones entre los participantes eran competitivas o cooperativas?
4.2.10 ¿El moderador fue útil al grupo?
4.2.11 Según lo anterior, ¿qué debe mejorar el grupo?

4.3 HETEROEVALUACIÓN

Si durante cada clase realizas tu autoevaluación y determinas los aciertos y errores y los corriges a tiempo, en el momento en que te practiquen las pruebas orales o escritas tendrás mayor probabilidad de éxito. Registra en el siguiente cuadro las valoraciones obtenidas en cada uno de los logros:

BIBLIOGRAFÍA – BIBLIOGRAPHY AND WEB REFERENCE

- CONTRERAS. LIZCANO. Logros matemáticos 11. McGraw-Hill. 1997.
- SMITH, Robert. MINTON, Roland. Matemáticas: Aplicaciones y Conexiones 11. McGraw-Hill. 2000.
- AUTORES VARIOS. Matemática 6. Colegio Cafam. 1992.
- SWOKOWSKI, Earl W. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Thomson. 11ªed. 2006.
- STEWART, James. Pre cálculo. Matemáticas para el cálculo. Thomson. 5ª ed. 2007
- AUGER, L. Ayudarse a sí mismo. Una psicoterapia mediante la razón. Santander, Sal Terrae, 1987.
- GUZMÁN, Miguel de. Para pensar mejor. Ed. Labor. Barcelona, 1991.
- MESA B. Orlando. Contextos para el desarrollo de situaciones problema. Instituto de educación no formal. Centro de pedagogía participativa. Colombia, 1998.

WEBGRAFÌA – TICS

www.vitutor.com/fun/2/a_a.html - España -
www.sectormatematica.cl/educmedia.htm
www.ejercitando.com.ar/probmate/prmatndx.htm -